ЛЕКЦИЯ 6

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Исследование процессов и аппаратов в условиях промышленного производства является очень сложным, длительным и дорогостоящим. В связи с этим большое значение имеет моделирование химико-технологических процессов. Изучение на модельных системах закономерностей отдельного процесса позволяет распространить их на все процессы подобные изученному.

Теория подобия указывает, как нужно ставить опыты и как обрабатывать опытные данные, чтобы, ограничившись минимальным числом опытов, иметь право обобщать результаты и получать закономерности изменения параметров для целой группы подобных явлений. Теория подобия позволяет с достаточной для практики точностью изучить сложные процессы на моделях, значительно меньших по размерам и часто более простых, чем аппараты натуральной величины. Кроме того, опыты можно проводить не с рабочими веществами (токсичными, взрывоопасными, дорогостоящими т.п.), а с модельными. Все это позволяет упрощать и удешевлять эксперимент.

Одним из основных принципов теории подобия является выделение из класса явлений, описываемых общим законом, группы подобных явлений.

Подобными называют явления, для которых отношения сходственных и характеризующих их величин постоянны. Основное требование, выдвигаемое при моделировании с помощью теории подобия– это подобие дифференциальных уравнений, описывающих процесс, при выполнении условий однозначности.

Дифференциальные уравнения описывают целый класс однородных явлений. Для выделения из класса конкретного явления, например, движения по трубам, необходимо ограничить дифференциальные уравнения дополнительными условиями - условиями однозначности, т.е. условиями, которые характеризуют данное явление.

Условия однозначности включают:

1) Геометрическую форму и размеры системы, в которой протекает процесс;

2) Физические (физико-химические) параметры веществ, находящихся в системе;

3) Начальные условия протекания процесса (начальные скорость, температура и т.д.);

4) Состояние системы на ее границах, например, равенство нулю скорости жидкости на неподвижных стенках.

Многие процессы настолько сложны, что удается только дать математическую формулировку задачи и поставить условия однозначности. Полученные же дифференциальные уравнения часто не решаются известными в математике методами. Иногда даже не удается составить систему дифференциальных уравнений, полностью описывающих процесс. Решением исходных дифференциальных уравнений в таких случаях являются обобщенные уравнения , полученные с применением теории подобия и основанные на экспериментальном материале. Эти уравнения затем используются в инженерной практике.

Моделирование с помощью теории подобия основывается на изучении процесса, проходящего в промышленном аппарате (натуре) и на модели. Под моделью подразумевается материальная модель, в отличие от математической или мысленной. Это - физическое моделирование, при котором изменяются масштаб установки, физические свойства вещества и т.д., но физическая сущность изучаемого в модели процесса остаются той же, что и в оригинальном аппарате.

Различают следующие виды подобия:

1) Геометрическое подобие предполагает, что сходные размеры натуры и модели параллельны, а их отношение выражается постоянной и равной величиной.

Представим, что изучается сложное явление - движение газов во вращающемся цилиндре (барабанной сушилке). Чтобы исследовать процесс, строится модель, при соблюдении геометрического подобия.

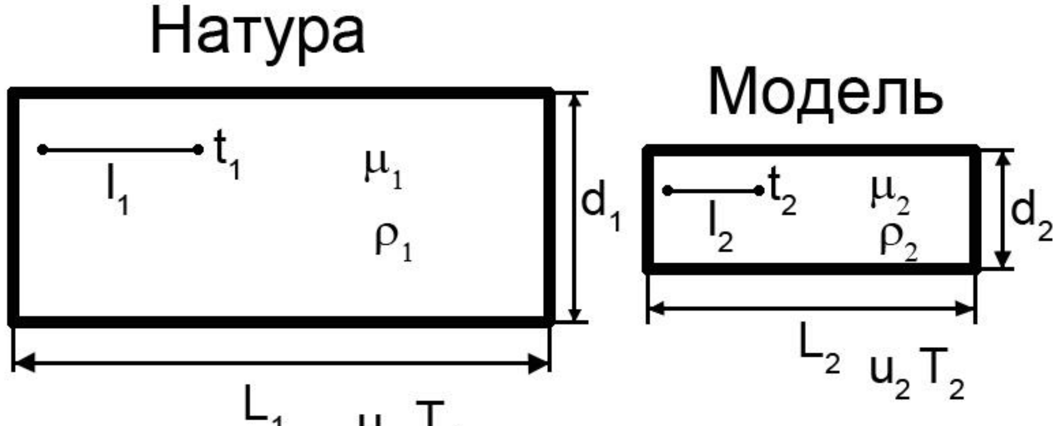

Рис.6.1.Соотношение натуры и модели

Геометрическое подобие требует, чтобы были равны отношения всех сходственных линейных размеров натуры и модели: $d_1/d_2 = L_1/L_2$.

Если рассматриваемая система - натура - находится в движении, то все ее точки при наличии геометрического подобия должны перемещаться только по подобным траекториям сходственных точек подобной ей системы - модели, и должны проходить геометрически подобные пути.

Равенство всех сходственных линейных размеров определяется как геометрическое подобие: $d_1/d_2 = L_1/L_2 = l_1/l_2 = a_l = \text{const}$, где a_l - безразмерное число, константа подобия или масштабный множитель, равный отношению однородных сходственных величин в подобных системах.

a_l позволяет перейти от размеров одной системы к размерам другой.

2) Временное подобие предполагает, что сходственные точки или части геометрически подобных систем (модели и натуры), двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные пути в промежутки времени, отношение которых является постоянной величиной: $T_1/T_2 = t_1/t_2 = a_t = \text{const}$.

a_t -константа временного подобия, T_1, T_2, t_1, t_2 - промежутки времени в модели и натуре.

При соблюдении геометрического и временного подобия будет соблюдаться также и подобие скоростей: $v_1/v_2 = a_v$.

3) Подобие физических величин предполагает, что в рассматриваемых подобных системах (натуре и модели) отношение значений физических величин двух любых сходственных точек или частиц, подобно размещенных в пространстве и времени, есть величина постоянная. Чтобы физическое явление было подобным, необходимо: $\mu_1/\mu_2 = a_\mu$, $\rho_1/\rho_2 = a_\rho$ или $u_1/u_2 = a_u$, где u_1 и u_2 -совокупность физических величин.

Следует отметить, что физическое подобие включает не только подобие значений физических параметров, по и подобие совокупности значений физических величин или полей физических величин.

4) Подобие начальных и граничных условий предполагает, что начальное состояние и состояние на границах систем подобны, т.е. отношения основных параметров натуры и модели в начале процесса и на границах систем постоянны.

Это условие может соблюдаться лишь в случаях, когда для начальных условий и условий на границах выдерживаются геометрическое и физическое подобие.

Свойства констант подобия

1) Константы подобия являются постоянными для двух сходственных точек натуры и модели (но они не равны между собой): $a_l \neq a_t \neq a_\mu \neq a_\rho$

2) В зависимости от соотношения (масштаба) натуры и модели константы подобия могут изменяться.

3) Входящие в константы подобия одноименные величины могут взаимно заменяться: $L_1/L_2 = l_1/l_2 = (L_1 - l_1)/(L_2 - l_2) = d_1\ l_1/d_2\ l_2$ и т.д.

Инварианты подобия и критерии подобия

Подобные явления можно выражать с помощью инвариантов подобия.

Инвариант подобия - отношение какой-либо величины данной системы к определенной одноименной величине в той же системе, при этом все подобные величины выражаются в относительных единицах.

Так: $L_1/d_1/= L_2/d_2 = i_l = const = idem = inv$ - инвариантно, где i_l - инвариант подобия геометрических величин.

Аналогично можно записать: $T_1/t_1 = T_2/t_2 = i_t$.

Свойства инвариантов подобия

1) В сходственных точках подобных систем инварианты подобия для одних и тех же величин равны: $i_{l1} = i_{l2}$.

2) Инварианты подобия для различных величин между собой не равны: $i_l \neq i_t \neq i_\rho$.

3) При изменении масштаба модели и натуры инварианты подобия не изменяют свою величину.

Инварианты подобия, выраженные отношением простых однородных величин, называют *симплексами.*

Инварианты подобия, выраженные через соотношения разнородных величин и представляющие собой безразмерные комплексы, называют *критериями подобия*. Критерии подобия обозначают именами выдающихся ученых, например, критерий Рейнольдса.

Критерии подобия получают подобным преобразованием дифференциальных уравнений, описывающих какой-либо процесс.

<u>Теоремы подобия</u>

Теория подобия ее практическое применение к исследованию технологических процессов основаны на трех теоремах подобия.

<u>1-я теорема, Ньютона</u>

*Подобные между собой явления имеют равные критерия подобия***.**

Т.к. в подобных системах критерии подобия равны, то отношение критериев подобия натуры и модели всегда будет равно единице.

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2 \quad \left(\frac{\upsilon_1 l_1 \rho_1}{\mu_1}\right) / \left(\frac{\upsilon_2 l_2 \rho_2}{\mu_2}\right) = 1 \quad \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\frac{l_1}{l_2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) / \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) = 1 \ \text{или} \ \frac{a_\upsilon a_l a_\rho}{a_\mu} = 1$$

Теорема отвечает на вопрос, какие величины необходимо измерять во время эксперимента: величины, входящие в критерии подобия.

<u>2-я теорема. Бэкингема, Афанасьевой-Эренфест</u>

Любое дифференциальное уравнение, связывающее между собой переменные, характеризующие какой-либо процесс, может быть представлено в виде зависимости между критериями подобия.

$f(K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n) = 0$ - обобщенное критериальное уравнение, K_i -критерий подобия.

Если в критерии подобия есть величина, не входящая в условия однозначности, такой критерий называют определяемым. В него входит величина, которую требуется определить, решая уравнение.

Тогда: $K_1 = f(K_2, K_3, \ldots, K_n)$ или $K_1 = A K_2^p K_3^q \ldots K_n^s$,

где A, p, q, s – экспериментальные константы.

Данная теорема отвечает на вопрос, как нужно обрабатывать экспериментальные данные: в виде зависимости между критериями подобия.

<u>3-я теорема. Кирпичева-Гухмана</u>

Подобны те явления, условия однозначности которых подобны, а определяющие критерии, составленные из условий однозначности, численно равны.

С помощью теории подобия исследования проводят в два этапа:

1) Проводят подобное преобразование дифференциального уравнения, описывающего процесс, и получают критерии подобия;

2) Опытным путем на моделях устанавливают конкретный вид зависимости между критериями подобия, получая при этом обобщенное расчетное уравнение.

Это уравнение работает в исследованных пределах изменения определяющих критериев.

Недостатки теории подобия

1) Теория не может дать больше того, что содержится в исходных дифференциальных уравнениях. Если исходные уравнения неверно описывают физическую сущность процесса, то и полученные с помощью теории подобия зависимости будут неверными.

2) Физическое моделирование всегда связано с проведением эксперимента на модели, иногда довольно сложного и длительного. Полученные обобщенные уравнения надежно работают только в интервалах переменных, которые были использованы в экспериментах.

Гидродинамическое подобие

Движение вязкой жидкости описывается уравнением Навье-Стокса. Запишем его для вертикальной оси z: $\rho \frac{d\upsilon_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho + \mu\nabla^2\upsilon_z$ (6.1)

Получим приближенное решение этого уравнения методами теории подобия для различных случаев движения жидкости.

Для этого: 1) зададим константы подобия, выражающие отношения величин, входящих в уравнение Навье-Стокса: a_l, a_t, a_μ, a_ρ, a_g, a_υ, a_p

Каждый из элементов дифференциального уравнения:

$$\rho(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}) + \rho \frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho + \mu\nabla^2\upsilon_z \qquad (6.2)$$

умножается на соответствующие константы подобия, причем последние как постоянные величины, выносятся за знак дифференциала.

$$\frac{a_\rho a_\upsilon^2}{a_l}\rho(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}) + \frac{a_\rho a_\upsilon}{a_t}\rho \frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} = \frac{a_p}{a_l}(-\frac{\partial p}{\partial z}) + a_g a_\rho g\rho + \frac{a_\mu a_\upsilon}{a_l^2}\mu\nabla^2\upsilon_z \qquad (6.3)$$

Для сохранения тождественности полученного и исходного уравнений необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{a_\rho a_\upsilon^2}{a_l} = \frac{a_\rho a\upsilon}{a_t} = \frac{a_p}{a_l} = a_g a_\rho = \frac{a_\mu a_\upsilon}{a_l^2} \qquad (6.4)$$

Разделим поочередно дроби, начиная со второй, на первую, крайнюю слева. Отношения будут равны единице, т.к. они все являются индикаторами подобия, а у подобных явлений индикаторы равны единице.

После деления заменим константы подобия их значениями: $a_l = l_1/l_2$, $a_t = t_1/t_2$, $a_\mu = \mu_1/\ \mu_2$, $a_\rho = \rho_1/\ \rho_2$, и т.д.

$$\frac{a_\rho a_\upsilon}{a_t} / \frac{a_\rho a_\upsilon^2}{a_l} = 1 \tag{6.5}$$

$$\frac{\upsilon_1 t_1}{l_1} = \frac{\upsilon_2 t_2}{l_2} \tag{6.6}$$

Обозначим комплекс

$$Ho = \frac{\upsilon t}{l} \tag{6.7}$$

Ho - Критерий гомохронности. Для неустановившегося движения во всех сходственных точках подобных систем (натуры и модели) критерий гомохронности будет иметь одно и то же значение. Т.е. критерий гомохронности ***Ho*** характеризует неустановившееся состояние в подобных системах.

$$\frac{a_p}{a_l} / \frac{a_\rho a_\upsilon^2}{a_l} = 1 \tag{6.8}$$

$$\frac{p_1}{\rho_1 \upsilon_1^2} = \frac{p_2}{\rho_2 \upsilon_2^2} \tag{6.9}$$

Обозначим комплекс

$$Eu = \frac{\Delta p_2}{\rho_2 \upsilon_2^2} \tag{6.10}$$

Eu - критерий Эйлера - отражает отношение сил давления или перепада давлений к силам инерции.

$$a_g a_\rho / \frac{a_\rho a_\upsilon^2}{a_l} = 1 \tag{6.11}$$

$$\frac{g_1 l_1}{\upsilon_1^2} = \frac{g_2 l_2}{\upsilon_2^2} \tag{6.12}$$

Обозначим комплекс

$$Fr = \frac{\upsilon^2}{g l} \tag{6.13}$$

Fr -критерий Фруда - отражает отношение сил инерции к силам тяжести (гравитационный критерий).

$$\frac{a_\mu a_\upsilon}{a_l^2} / \frac{a_\rho a_\upsilon^2}{a_l} = 1 \quad (6.14)$$

$$\frac{\upsilon_1 / \upsilon_2 \times \rho_1 / \rho_2 \times l_1 / l_2}{\mu_1 / \mu_2} = 1$$

$$\frac{\upsilon_1 l_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{\upsilon_2 l_2 \rho_2}{\mu_2} \quad (6.15)$$

Этот комплекс был определен ранее как *Re*

$$Re = \frac{\upsilon l \rho}{\mu} \quad (6.16)$$

Re -критерий Рейнольдса - характеризует отношение сил инерции к силе внутреннего трения и определяет режим движения жидкости во всех сходственных точках подобных систем.

Таким образом, согласно 2-й теореме подобия, уравнение Навье-Стокса, описывающее в общем виде процесс движения вязкой жидкости может быть представлено в виде зависимости между критериями подобия:

f*(Ho, Fr, Eu, Re)*=0 (6.17)

В ряде случаев в это уравнение может быть добавлен симплекс геометрического подобия - *l/d*: *f(Ho, Fr, Eu, Re, l/d)*=0 . (6.18)

Все входящие в уравнение критерии, кроме критерия Эйлера, являются определяющими, т.к. составлены исключительно из величин, выражающих условия однозначности. В *Eu* входит величина *Δp*, значение которой при движении по какому-либо каналу определяется его формой, т.е. отношением *l/d*, физическими свойствами жидкости (*μ, ρ*), а также распределением скоростей у входа в трубу и у ее стенок (начальные и граничные условия). Поэтому критерий Эйлера является определяемым и для подобия достаточно соблюдения равенства критериев: *Ho, Fr, Eu, Re* и *l/d*.

Согласно 3-й теореме, следствием этого будет следующее равенство:

Eu = f(Ho, Fr, Re, l/d) . (6.19)

Это уравнение называют *обобщенным уравнением гидродинамики*.

Решение обычно выражают в виде степенной функции:

$Eu = A\ Ho^n\ Fr^m\ Re^q\ (l/d)^p$ (6.20)

Коэффициенты: *A, n, m, q, p* определяют из опытных данных.

Если движение установившееся, то обобщенное критериальное уравнение не содержит критерий *Ho*.

При моделировании некоторых технологических процессов не удается соблюсти полное подобие, и можно удовлетвориться подобием лишь тех факторов, которые наиболее существенно влияют на процесс.

Иногда можно пренебречь влиянием некоторых сил, которые слабо влияют на процесс. Например, при вынужденном движении жидкостей по трубам, влияние силы тяжести незначительно, и критерий Fr можно исключить из уравнения.

Если в процессе исследования сложно определить некоторые переменные, влияющие на процесс, то следует использовать критерии, полученные путем комбинации других критериев, например:

$$Ga = \frac{Re^2}{Fr} = \frac{gl^3}{\nu^2} \quad \text{- Критерий Галилея} \tag{6.21}$$

$$Ar = Ga\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{gl^3}{\nu^2}\frac{\Delta\rho}{\rho} \quad \text{- Критерий Архимеда.} \tag{6.22}$$